

Extension de la torsion analytique holomorphe aux fibrés en droites intégrables

Mounir Hajli

Résumé

Soit X une variété kählérienne compacte. On montre que la notion de métrique de Quillen s'étend aux métriques intégrables sur X . En particulier, on établit que la notion de torsion analytique holomorphe s'étend à l'ensemble des fibrés en droites intégrables \overline{L} sur X , qui vérifient $H^q(X, L) = 0$ pour tout $q \geq 1$.

Table des matières

1	Introduction	1
2	La métrique de Quillen et la torsion analytique holomorphe, un rappel	3
3	Métriques admissibles	4
4	Généralisation de la torsion analytique aux fibrés intégrables sur les variétés kählériennes compactes	5
4.1	Un contre exemple	10
4.2	Un calcul explicite de la torsion analytique généralisée dans le cas $X = \mathbb{P}^1$	12
5	Généralisation de la torsion analytique sur les variétés toriques lisses dans le formalisme de Burgos, Litcanu et Freixas	13
5.1	Extension de la notion de métrique canonique aux faisceaux cohérents metrisés sur une variété torique lisse	13
5.2	Torsion analytique généralisée associée aux fibrés intégrables sur variété torique	15

1 Introduction

Dans [12], Ray et Singer associent à toute variété kählérienne compacte (X, ω) et \overline{E} un fibré hermitien de classe \mathcal{C}^∞ sur X , un réel noté $T((X, \omega); \overline{E})$ appelé la torsion analytique holomorphe, défini en posant :

$$T((X, \omega); \overline{E}) = \sum_{q \geq 0} q(-1)^{q+1} \zeta'_{\Delta_{\overline{E}}^q}(0),$$

où $\zeta'_{\Delta_{\overline{E}}^q}(0)$ est la dérivée en zéro du prolongement analytique de la fonction Zêta $\zeta_{\Delta_{\overline{E}}^q}$ associée au spectre de l'opérateur Laplacien $\Delta_{\overline{E}}^q$ agissant sur $A^{(0,q)}(X, E)$, l'espace des $(0, q)$ -formes de classe \mathcal{C}^∞ à coefficients dans E , pour tout $q \geq 0$.

Dans ce texte, on étend la notion de métrique de Quillen aux métriques admissibles et plus généralement aux métriques intégrables sur les fibrés en droites holomorphes définis sur une variété kählérienne compacte. Rappelons qu'une métrique admissible sur L , un fibré en droites holomorphe, est par définition une limite uniforme d'une suite de métriques positives de classe C^∞ sur X . Ce sont donc des métriques continues, mais qui sont en général non C^∞ . On ne peut pas donc appliquer directement la construction de [12] pour leur associer une torsion analytique holomorphe, mais on procède différemment en utilisant une méthode d'approximation moyennant les formules des anomalies, qui donnent la variation de la métrique Quillen et par conséquent celle de la torsion analytique, en fonction de la variation de la métrique sur L .

Notre résultat principal s'énonce donc comme suit, voir (théorème (4.3)) :

Théorème 1.1. *Soit X une variété complexe kählérienne compacte de dimension N muni d'une forme de Kähler ω et $\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$ un fibré en droites intégrable sur X . Pour toute décomposition de $\overline{L} = (E_1, \|\cdot\|_1) \otimes (E_2, \|\cdot\|_2)^{-1}$ en fibrés admissibles et pour tout choix de $(\|\cdot\|_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de métriques positives C^∞ sur E_i qui converge uniformément vers $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2$, la suite double :*

$$\left(h_{Q,(X,\omega);(E_1 \otimes E_2^{-1}, \|\cdot\|_{1,n} \otimes \|\cdot\|_{2,m}^{-1})} \right)_{n,m \in \mathbb{N}}^1, \quad (1)$$

est convergente et la limite ne dépend pas ni de la décomposition ni de la suite choisie, on l'appellera la métrique de Quillen généralisée et on la notera par :

$$h_{Q,(X,\omega);(L,\|\cdot\|)}.$$

Si $H^q(X, L) = 0$, pour tout $q \geq 1$, alors la suite suivante :

$$\left(T((X, \omega); (E_1 \otimes E_2^{-1}, \|\cdot\|_{1,n} \otimes \|\cdot\|_{2,m}^{-1})) \right)_{n,m \in \mathbb{N}}, \quad (2)$$

converge vers une limite finie. On l'appellera la torsion analytique holomorphe de Ray-Singer généralisée et on la notera par :

$$T((X, \omega), (L, \|\cdot\|)).$$

Lorsque X est une surface de Riemann compacte, alors on obtient un résultat plus général, en effet, on peut considérer des métriques intégrables sur X et sur L et on étend la notion de métrique Quillen à cette situation :

Théorème 1.2. *Soit X une surface de Riemann compacte, et L un fibré en droites sur X . Soit $h_{\infty,X}$ (resp. vers $h_{\infty,L}$) une métrique intégrable sur X (resp. L). On note par $\omega_{\infty,X}$ la forme kählérienne associée à $h_{\infty,X}$.*

- *On considère une décomposition de $(TX, h_{\infty,X}) = \overline{G_{1\infty}} \otimes \overline{G_{2\infty}}^{-1}$ en fibrés en droites admissibles, et soit $(h_{n,G_1})_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(h_{n,G_2})_{n \in \mathbb{N}}$) une suite de métriques positives et C^∞ qui converge uniformément vers h_{∞,G_1} (resp. h_{∞,G_2}). On pose $h_{n,X} := h_{n,G_1} \otimes h_{n,G_2}^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on note par $\omega_{n,X}$ la forme kählérienne associée pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *Soit $\overline{L} = (E_1, \|\cdot\|_1) \otimes (E_2, \|\cdot\|_2)^{-1}$ une décomposition en fibrés admissibles. On considère $(\|\cdot\|_{E_i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de métriques positives C^∞ sur E_i qui converge uniformément vers $\|\cdot\|_i$, pour $i = 1, 2$, et on pose $h_{n,L} := h_{n,E_1} \otimes h_{n,E_2}^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Alors la suite double suivante :

$$\left(T((X, \omega_{n,X}); (L, h_{m,L})) \right)_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}},$$

converge vers une limite finie qui ne dépend pas du choix des suites ci-dessus. On la note par $T((X, \omega_{\infty,X}); (L, h_{\infty,L}))$.

1. On dira qu'une suite double $(x_{j,k})_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite l , si $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall n, m > A$ alors $|x_{n,m} - l| < \varepsilon$.

Dans le paragraphe (4.1), On montre à l'aide d'un contre exemple la non-validité du théorème (4.3) si l'on supprime l'hypothèse de positivité des termes de la suite du théorème. Plus précisément, on va montrer le résultat suivant :

Théorème 1.3. *Pour toute forme de Kähler $\omega_{\mathbb{P}^1}$ sur \mathbb{P}^1 , et pour tout $c > 0$, il existe une suite de métriques $(h_{c,\delta})_\delta$ de classe \mathcal{C}^∞ convergeant uniformément vers la métrique canonique de \mathcal{O} sur \mathbb{P}^1 telle que :*

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} T((\mathbb{P}^1, \omega_{\mathbb{P}^1}); (\mathcal{O}, h_{c,\delta})) - T((\mathbb{P}^1, \omega_{\mathbb{P}^1}), (\mathcal{O}, h_\infty)) \leq -2c^2.$$

La section (5) est dédiée à l'extension de la notion de faisceaux cohérents métrisés aux métriques canoniques. On introduira la définition suivante :

Définition 1.4. *Soit X une variété torique lisse. Soit $\overline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}, \overline{E}_\bullet \rightarrow \mathcal{F})$ un faisceau cohérent métrisé sur X , on dira que la métrique de \mathcal{F} est intégrable (resp. canonique) si chaque terme de \overline{E}_\bullet est une somme directe orthogonale de fibrés en droites munis de métriques intégrables (resp. de leur métriques canoniques), on le note $\overline{\mathcal{F}}^c$ lorsqu'on considère des métriques canoniques partout.*

On établit la proposition suivante :

Proposition 1.5. *Tout fibré vectoriel équivariant sur une variété torique lisse admet une métrique canonique.*

En suivant [9], on étend la notion de métrique de Quillen associée à cette classe de métriques généralisée. On termine par énoncer un résultat comparant notre approche avec celle de [9] en dimension 1, c'est l'objet du théorème (5.6).

Remerciements : Cet article fait partie de ma thèse. Je tiens à remercier V.Maillot pour m'avoir proposé ce sujet si riche, pour ses indications et son encouragement. Je tiens aussi à remercier J.I. Burgos pour ses conseils et ses remarques sur ce travail, en particulier pour la remarque (4.8), G.Freixas, X. Ma et D.Eriksson.

2 La métrique de Quillen et la torsion analytique holomorphe, un rappel

Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte et \overline{E} un fibré hermitien de classe \mathcal{C}^∞ sur X . A cette donnée, on associe pour tout $q \geq 0$, un opérateur $\Delta_{\overline{E}}^{(0,q)}$ agissant sur $A^{(0,q)}(X, E)$. On sait que cet opérateur admet un spectre infini positif et que la fonction Zêta associée se prolonge analytiquement au voisinage de 0, voir par exemple [1, § 9.6].

On définit la torsion analytique holomorphe en posant :

$$T((X, \omega); \overline{E}) = \sum_{q \geq 0} q(-1)^{q+1} \zeta'_{\Delta_{\overline{E}}^q}(0).$$

et on munit $\lambda(L) = \otimes_{q \geq 0} \det(H^q(X, L))^{(-1)^q}$, le déterminant de cohomologie de L , de la métrique suivant :

$$h_Q := h_{L^2} \exp\left(T((X, \omega); \overline{E})\right)$$

appelée la métrique de Quillen, où h_{L^2} est la métrique L^2 induite par ω et h_E . On rappelle que cette construction permet de définir l'image directe pour une submersion entre groupes de K-théorie arithmétique, voir [13, proposition 3.1].

On dispose de formules appelées formules des anomalies donnant la variation de la métrique de Quillen lorsque la métrique varie sur E ou sur X , voir [2, théorèmes 0.2, 0.3]. Lorsque la métrique varie sur E , alors on a :

$$\log h_{Q,(X,\omega),(E,\|\cdot\|)} - \log h_{Q,(X,\omega),(E,\|\cdot\|')} = - \left[\int_X \widetilde{\text{ch}}(E, \|\cdot\|, \|\cdot\|') Td(\overline{TX}) \right]^{(\dim_{\mathbb{C}} X)} 2. \quad (3)$$

La variation associée au changement de métrique sur X , elle est donnée par :

$$\log h_{Q,(X,\omega),(E,\|\cdot\|)} - \log h_{Q,(X,\omega'),(E,\|\cdot\|)} = - \left[\int_X ch(E, \|\cdot\|) \widetilde{Td}(TX, h_X, h'_X) \right]^{(\dim_{\mathbb{C}} X)} \quad (4)$$

où $\widetilde{\text{ch}}(E, \|\cdot\|, \|\cdot\|')$ (resp. $\widetilde{Td}(TX, h_X, h'_X)$) est la classe de Bott-Chern associée à la suite $0 \rightarrow (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|') \rightarrow 0$ (resp. $0 \rightarrow (TX, h_X) \rightarrow (TX, h'_X) \rightarrow 0$), et au caractère ch (resp. Td), voir [5] pour la définition et les propriétés de la classe de Bott-Chern.

3 Métriques admissibles

Soit X une variété complexe analytique et $\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$ un fibré en droites hermitien muni d'une métrique continue sur L .

Définition 3.1. On appelle premier courant de Chern de \overline{L} et on note $c_1(\overline{L}) \in D^{(1,1)}(X)$ le courant défini localement par l'égalité :

$$c_1(\overline{L}) = dd^c(-\log \|s\|^2),$$

où s est une section holomorphe locale et ne s'annulant pas du fibré L .

Définition 3.2. La métrique $\|\cdot\|$ est dite positive si $c_1(L, \|\cdot\|) \geq 0$.

Définition 3.3. La métrique $\|\cdot\|$ est dite admissible s'il existe une famille $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de métriques positives de classe C^∞ convergeant uniformément vers $\|\cdot\|$ sur L . On appelle fibré admissible sur X un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique admissible sur X .

On dira que \overline{L} est un fibré en droites intégrable s'il existe \overline{L}_1 et \overline{L}_2 admissibles tels que

$$\overline{L} = \overline{L}_1 \otimes \overline{L}_2^{-1}.$$

Exemple 3.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note par $\mathcal{O}(1)$ le fibré de Serre sur \mathbb{P}^n et on le munit de la métrique définie pour toute section méromorphe de $\mathcal{O}(1)$ par :

$$\|s(x)\|_\infty = \frac{|s(x)|}{\max(|x_0|, \dots, |x_n|)}.$$

Cette métrique est admissible.

En fait, c'est un cas particulier d'un résultat plus général combinant la construction Batyrev et Tschinkel sur une variété torique projective et la construction de Zhang. Dans la première construction permet d'associer canoniquement à tout fibré en droites sur une variété torique projective complexe une métrique continue notée $\|\cdot\|_{BT}$ et déterminée uniquement par la combinatoire de la variété, voir [11, proposition 3.3.1] et [11, proposition 3.4.1]. L'approche de Zhang est moins directe, elle utilise un

2. Si $\eta \in A(X)$, alors on définit $\left[\int_X \eta \right]^{(d)}$ comme étant $\int_X \eta_d$ où η_d est la d -ème partie graduée du η dans $A(X)$, l'algèbre des $(*, *)$ -formes différentielles de classe C^∞ .

endomorphisme équivariant (correspondant à la multiplication par p , un entier supérieur à 2) afin de construire par récurrence une suite de métriques qui converge uniformément vers une limite notée $\|\cdot\|_{Zh,p}$ et qui, en plus, ne dépend pas du choix de la métrique de départ, voir [14] ainsi que [11, théorème 3.3.3]. Mais d'après [11, théorème 3.3.5] on montre que

$$\|\cdot\|_{BT} = \|\cdot\|_{Zh,p}.$$

Que l'on appelle la métrique canonique associée à L . Notons que lorsque L n'est pas trivial, alors cette métrique est non C^∞ .

4 Généralisation de la torsion analytique aux fibrés intégrables sur les variétés kählériennes compactes

Dans cette section, on étend la notion de torsion analytique holomorphe aux fibrés intégrables sur une variété kählérienne compacte. Soit $\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$ un fibré intégrable. En considérant $(\|\cdot\|_n)$, une suite de métriques convenablement choisie, on va montrer, en utilisant la formule des anomalies et la théorie de Bedford-Taylor, que la suite formée par des métriques de Quillen correspondantes, forme une suite de Cauchy.

Rappelons le théorème suivant, qui sera utilisé dans la suite :

Théorème 4.1. *Soit U un ouvert dans une variété analytique complexe et soient u_1, \dots, u_q des fonctions plurisousharmoniques continues sur U . Soient $u_1^{(k)}, \dots, u_q^{(k)}$, q suites de fonctions plurisousharmoniques localement bornées sur U et convergeant uniformément sur tout compact de U vers u_1, \dots, u_q respectivement et $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de courants positifs fermés convergeant faiblement vers T sur U . Alors :*

$$u_1^{(k)}(dd^c u_2^{(k)}) \wedge \dots \wedge (dd^c u_q^{(k)}) \wedge T_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_1(dd^c u_2) \wedge \dots \wedge (dd^c u_q) \wedge T \quad (5)$$

$$(dd^c u_1^{(k)})(dd^c u_2^{(k)}) \wedge \dots \wedge (dd^c u_q^{(k)}) \wedge T_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (dd^c u_1)(dd^c u_2) \wedge \dots \wedge (dd^c u_q) \wedge T \quad (6)$$

au sens de la convergence faible des courants.

Démonstration. cf. par exemple [4]. □

Lemme 4.2. *Soit E_1 et E_2 deux fibrés en droites sur X . Soit $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|'_1$ (resp. $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|'_2$) deux métriques C^∞ sur E_1 (resp. sur E_2).*

On munit $L := E_1 \otimes (E_2)^{-1}$ des métriques $\|\cdot\|_L := \|\cdot\|_1 \otimes (\|\cdot\|_2)^{-1}$ et $\|\cdot\|'_L := \|\cdot\|'_1 \otimes (\|\cdot\|'_2)^{-1}$. Alors $\widehat{\text{ch}}(L, \|\cdot\|_L, \|\cdot\|'_L)$ est une somme linéaire de termes de la forme:

$$\left(\log(\|\cdot\|_1 \otimes \|\cdot\|'_2)^2 - \log(\|\cdot\|'_1 \otimes \|\cdot\|_2)^2 \right) c_1(\overline{E}_1)^i c_1(\overline{E}'_1)^j c_1(\overline{E}_2)^k c_1(\overline{E}'_2)^l, \quad (7)$$

avec $(i, j, k, l) \in \mathbb{N}^4$.

Démonstration. C'est une conséquence directe du [7, proposition 4.1]. □

Soit \overline{L} un fibré en droites intégrable sur X . Soit $(E_1, \|\cdot\|_1) \otimes (E_2, \|\cdot\|_2)^{-1}$ une décomposition de \overline{L} en fibrés admissibles. Par définition, il existe $(\|\cdot\|_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de métriques positives C^∞ sur E_i qui converge uniformément vers $\|\cdot\|_i$ sur X , pour $i = 1, 2$.

On pose, pour tout $(i, j, k, l) \in \mathbb{N}^4$, $(n, n') \in \mathbb{N}^2$ et $(m, m') \in \mathbb{N}^2$:

$$T_{(n, n'), (m, m')}^{i, j, k, l}(\cdot, \cdot) := \left(\log(\|\cdot\|_{1, n} \otimes \|\cdot\|_{2, m'})^2 - \log(\|\cdot\|_{1, n'} \otimes \|\cdot\|_{2, m})^2 \right) c_1(\overline{E}_{1, n})^i c_1(\overline{E}_{1, n'})^j c_1(\overline{E}_{2, m})^k c_1(\overline{E}_{2, m'})^l,$$

où l'on a choisit implicitement des sections locales holomorphes de E_1 et E_2 de façon à ce que la forme ci-dessus soit définie sur X entier.

On se propose de montrer que

$$\left[\int_X \widetilde{\text{ch}}(E_1 \otimes E_2^{-1}, h_{1, n} \otimes h_{2, m}^{-1}, h_{1, n'} \otimes h_{2, m'}^{-1}) Td(\overline{TX}) \right]^{(\dim_{\mathbb{C}} X)},$$

tends vers zéro lorsque n, n', m et m' tendent vers ∞ .

Par compacité de X , [7, proposition 4.1] et (4.2), il existe un ensemble fini Ω , $(U_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ un recouvrement ouvert de X et $(s_{\alpha, 1})_{\alpha \in \Omega}$ (resp. $(s_{\alpha, 2})_{\alpha \in \Omega}$) un ensemble de sections locales holomorphes de E_1 (resp. de E_2) avec que $s_{\alpha, 1}$ (resp. $s_{\alpha, 2}$) soit non nulle sur U_α , $\forall \alpha \in \Omega$ tels que pour $\alpha \in \Omega$, la classe de Bott-Chern $\widetilde{\text{ch}}(E_1 \otimes E_2^{-1}, h_{1, n} \otimes h_{2, m}^{-1}, h_{1, n'} \otimes h_{2, m'}^{-1})$ soit donnée sur U_α par une combinaison linéaire en :

$$T_{(n, n'), (m, m')}^{i, j, k, l}(s_{\alpha, 1}, s_{\alpha, 2}),$$

qu'on rappelle égal à :

$$T_{(n, n'), (m, m')}^{i, j, k, l}(s_{\alpha, 1}, s_{\alpha, 2}) := \left(\log(\|s_{1, \alpha}\|_{1, n} \otimes \|s_{2, \alpha}\|_{2, m'})^2 - \log(\|s_{1, \alpha}\|_{1, n'} \otimes \|s_{2, \alpha}\|_{2, m})^2 \right) c_1(\overline{E}_{1, n})^i c_1(\overline{E}_{1, n'})^j c_1(\overline{E}_{2, m})^k c_1(\overline{E}_{2, m'})^l \text{ sur } U_\alpha, \forall \alpha \in \Omega.$$

On considère $(\rho_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$, une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$, c'est à dire que

1. $\forall \alpha \in \Omega$, ρ_α est une fonction réelle de classe \mathcal{C}^∞ sur X à support inclus dans U_α et à valeurs dans $[0, 1]$.
2. $\sum_{\alpha \in \Omega} \rho_\alpha(x) = 1, \forall x \in X$.

On a donc,

$$\begin{aligned} \int_X \widetilde{\text{ch}}(E_1 \otimes E_2^{-1}, h_{1, n} \otimes h_{2, m}^{-1}, h_{1, n'} \otimes h_{2, m'}^{-1}) Td(\overline{TX}) &= \sum_{\alpha \in \Omega} \int_X \rho_\alpha \widetilde{\text{ch}}(E_1 \otimes E_2^{-1}, h_{1, n} \otimes h_{2, m}^{-1}, h_{1, n'} \otimes h_{2, m'}^{-1}) Td(\overline{TX}) \\ &= \sum_{\alpha \in \Omega} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \widetilde{\text{ch}}(E_1 \otimes E_2^{-1}, h_{1, n} \otimes h_{2, m}^{-1}, h_{1, n'} \otimes h_{2, m'}^{-1}) Td(\overline{TX}). \end{aligned}$$

Dans $A(X) = \oplus_{p \in \mathbb{N}} A^{(p, p)}(X)$, on écrit

$$Td(\overline{TX}) = \sum_{r \geq 0} t_r,$$

où $t_r \in A^{(r, r)}(X), \forall r \geq 0$.

Fixons maintenant $\alpha \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \tilde{\text{ch}}(E_1 \otimes E_2^{-1}, h_{1,n} \otimes h_{2,m}^{-1}, h_{1,n'} \otimes h_{2,m'}^{-1}) Td(\overline{TX}) &= \int_{U_\alpha} \sum_{r \geq 0} \rho_\alpha \tilde{\text{ch}}(E_1 \otimes E_2^{-1}, h_{1,n} \otimes h_{2,m}^{-1}, h_{1,n'} \otimes h_{2,m'}^{-1}) t_r \\ &= \sum_{r \geq 0} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \tilde{\text{ch}}(E_1 \otimes E_2^{-1}, h_{1,n} \otimes h_{2,m}^{-1}, h_{1,n'} \otimes h_{2,m'}^{-1}) t_r \\ &= \sum_{r \geq 0} \int_{U_\alpha} \tilde{\text{ch}}(E_1 \otimes E_2^{-1}, h_{1,n} \otimes h_{2,m}^{-1}, h_{1,n'} \otimes h_{2,m'}^{-1}) (\rho_\alpha t_r). \end{aligned}$$

Sur U_α , on a les suites de fonctions suivantes $\left(-\log(\|s_{1,\alpha}\|_{1,n})\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $\left(-\log(\|s_{1,\alpha}\|_{1,n'})\right)_{n' \in \mathbb{N}}$, $\left(-\log(\|s_{2,\alpha}\|_{2,m})\right)_{m \in \mathbb{N}}$, et $\left(-\log(\|s_{2,\alpha}\|_{2,m'})\right)_{m' \in \mathbb{N}}$ restreintes à U_α vérifient les hypothèses du théorème (4.1). En remarquant que :

$$\rho_\alpha t_r \in A_c(U_\alpha)^3 \quad \forall r.$$

On déduit que :

$$\forall i, j, k, l, \quad \left[T_{(n,n'),(m,m')}^{i,j,k,l}(s_{\alpha,1}, s_{\alpha,2}) (\rho_\alpha t_r) \right]^{(\dim_{\mathbb{C}} X)} \xrightarrow{n,n',m,m' \rightarrow \infty} 0,$$

lorsque n, n', m et m' tendent vers ∞ . En particulier, on obtient à l'aide du lemme (4.2) :

$$\left[\int_{U_\alpha} \tilde{\text{ch}}(E_1 \otimes E_2^{-1}, h_{1,n} \otimes h_{2,m}^{-1}, h_{1,n'} \otimes h_{2,m'}^{-1}) (\rho_\alpha t_r) \right]^{(\dim_{\mathbb{C}} X)} \xrightarrow{n,n',m,m' \rightarrow \infty} 0.$$

On conclut que

$$\left[\int_X \tilde{\text{ch}}(E_1 \otimes E_2^{-1}, h_{1,n} \otimes h_{2,m}^{-1}, h_{1,n'} \otimes h_{2,m'}^{-1}) Td(\overline{TX}) \right]^{(\dim_{\mathbb{C}} X)},$$

tends vers 0, lorsque n, n', m et m' tendent vers ∞ .

Maintenant, on suppose que $(G_1, \|\cdot\|_{G_1}) \otimes (G_2, \|\cdot\|_{G_2})^{-1}$ est une autre décomposition de \overline{L} en fibrés admissibles. Remarquons que $E_1 \otimes G_2 = E_2 \otimes G_1$ et qu'il est muni de deux métriques $\|\cdot\|_{E_1} \otimes \|\cdot\|_{G_2}$ et $\|\cdot\|_{G_1} \otimes \|\cdot\|_{E_2}$.

Pour $i = 1, 2$, on considère $(\|\cdot\|_{E_i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(\|\cdot\|_{G_i,n})_{n \in \mathbb{N}}$) une suite de métriques positives de classe \mathcal{C}^∞ convergeant uniformément vers $\|\cdot\|_{E_i}$ (resp. vers $\|\cdot\|_{G_i}$) sur X . D'après (4.2),

$$\tilde{\text{ch}}(L, \|\cdot\|_{E_{1,n}} \otimes \|\cdot\|_{E_{2,n'}}^{-1}, \|\cdot\|_{G_{1,m}} \otimes \|\cdot\|_{G_{2,m'}}^{-1}),$$

est une combinaison linéaire des termes de la forme suivante :

$$\left(\log(\|\cdot\|_{E_{1,n}} \otimes \|\cdot\|_{G_{2,m'}})^2 - \log(\|\cdot\|_{G_{1,m}} \otimes \|\cdot\|_{E_{2,n'}})^2 \right) c_1(\overline{E}_{n,1})^i c_1(\overline{E}_{2,n'})^j c_1(\overline{G}_{1,m})^k c_1(\overline{G}_{2,m'})^l.$$

Si l'on considère η une forme différentielle de degré $(\dim_{\mathbb{C}} X - p, \dim_{\mathbb{C}} X - p)$, avec $p = i + j + k + l$, sur U_α à support compact. Alors par le théorème (4.1), on a :

$$\left[\int_{U_\alpha} \left(\log(\|\cdot\|_{E_{1,n}} \otimes \|\cdot\|_{G_{2,m'}})^2 - \log(\|\cdot\|_{G_{1,m}} \otimes \|\cdot\|_{E_{2,n'}})^2 \right) c_1(\overline{E}_{n,1})^i c_1(\overline{E}_{2,n'})^j c_1(\overline{G}_{1,m})^k c_1(\overline{G}_{2,m'})^l \eta \right]^{(\dim_{\mathbb{C}} X)},$$

3. $A_c(U_\alpha)$ désigne l'ensemble des forme différentielles sur U_α à support compact

converge vers

$$\left[\int_{U_\alpha} \left(\log(\|\cdot\|_{E_1} \otimes \|\cdot\|_{G_2})^2 - \log(\|\cdot\|_{G_1} \otimes \|\cdot\|_{E_2})^2 \right) c_1(\overline{E}_1)^i c_1(\overline{E}_2)^j c_1(\overline{G}_1)^k c_1(\overline{G}_2)^l \eta \right]^{(\dim_{\mathbb{C}} X)},$$

lorsque n, n', m et m' tendent vers l'infini. Or,

$$\overline{L} = (G_1, \|\cdot\|_{G_1}) \otimes (G_2, \|\cdot\|_{G_2})^{-1} = (E_1, \|\cdot\|_{E_1}) \otimes (E_2, \|\cdot\|_{E_2})^{-1},$$

donc,

$$\left[\int_{U_\alpha} \left(\log(\|\cdot\|_{E_1} \otimes \|\cdot\|_{G_2})^2 - \log(\|\cdot\|_{G_1} \otimes \|\cdot\|_{E_2})^2 \right) c_1(\overline{E}_1)^i c_1(\overline{E}_2)^j c_1(\overline{G}_1)^k c_1(\overline{G}_2)^l \eta \right]^{(\dim_{\mathbb{C}} X)} = 0.$$

On va appliquer ce résultat pour étendre la notion de torsion analytique holomorphe aux fibrés intégrables :

Théorème 4.3. *Soit X une variété complexe kählérienne compacte de dimension N muni d'une forme de Kähler ω et $\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$ un fibré en droites intégrable sur X .*

Pour toute décomposition de $\overline{L} = (E_1, \|\cdot\|_1) \otimes (E_2, \|\cdot\|_2)^{-1}$ en fibrés admissibles et pour tout choix de $(\|\cdot\|_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de métriques positives C^∞ sur E_i qui converge uniformément vers $\|\cdot\|_i$ pour $i = 1, 2$, la suite double de métriques de Quillen :

$$\left(h_{Q,(X,\omega);(E_1 \otimes E_2^{-1}, \|\cdot\|_{1,n} \otimes \|\cdot\|_{2,m}^{-1})} \right)_{n,m \in \mathbb{N}}, \quad (8)$$

est convergente et la limite ne dépend pas ni de la décomposition ni de la suite choisie, on l'appellera la métrique de Quillen généralisée et on la notera

$$h_{Q,(X,\omega);(L,\|\cdot\|)}.$$

Si $H^q(X, L) = 0$, pour tout $q \geq 1$, alors la suite suivante :

$$\left(T\left((X, \omega); (E_1 \otimes E_2^{-1}, \|\cdot\|_{1,n} \otimes \|\cdot\|_{2,m}^{-1})\right) \right)_{n,m \in \mathbb{N}}, \quad (9)$$

converge vers une limite finie. On l'appellera la torsion analytique holomorphe de Ray-Singer généralisée et on la notera

$$T((X, \omega), (L, \|\cdot\|)),$$

et on a pour toute métrique C^∞ , $\|\cdot\|'$ sur L :

$$T((X, \omega), \overline{L}) = T((X, \omega), \overline{L}') + \int_X \tilde{\text{ch}}(L, \|\cdot\|, \|\cdot\|') Td(\overline{TX}) - \log \left(\frac{h_{L^2,(X,\omega),(L,\|\cdot\|')}}{h_{L^2,(X,\omega),(L,\|\cdot\|)}} \right),$$

où $\tilde{\text{ch}}(L, \|\cdot\|, \|\cdot\|')$ ici est une forme différentielle généralisée au sens de [11, § 4.3].

Démonstration. Soit $(L, \|\cdot\|)$ un fibré en droites intégrable sur X . Soient \overline{E}_1 et \overline{E}_2 deux fibrés en droites admissibles tels que $\overline{L} = \overline{E}_1 \otimes \overline{E}_2^{-1}$. On pose $\|\cdot\|_n := \|\cdot\|_{1,n} \otimes \|\cdot\|_{2,n}^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $(\|\cdot\|_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(\|\cdot\|_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$) est une suite de métriques positives C^∞ sur E_1 (resp. E_2) qui converge uniformément vers $\|\cdot\|_{E_1}$ (resp. $\|\cdot\|_{E_2}$).

Si l'on considère $\|\cdot\|'$ une métrique C^∞ quelconque sur L , alors d'après (3), on a :

$$\log h_{Q,(X,\omega),(L,\|\cdot\|_n)} - \log h_{Q,(X,\omega),(L,\|\cdot\|')} = - \left[\int_X \tilde{\text{ch}}(E_1 \otimes E_2^{-1}, \|\cdot\|_n, \|\cdot\|') Td(\overline{TX}) \right]^{(\dim_{\mathbb{C}} X)}.$$

Or, on a montré que le terme à droite converge vers une limite finie qui ne dépend ni du choix de la suite ni de la décomposition. Par conséquent, la suite suivante :

$$\left(-\log h_{Q,(X,\omega),(L,\|\cdot\|_n)} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\left[\int_X \tilde{\text{ch}}(E_1 \otimes E_2^{-1}, \|\cdot\|_n, \|\cdot\|') Td(\overline{TX}) \right]^{(\dim_{\mathbb{C}} X)} - \log h_{Q,(X,\omega),(L,\|\cdot\|')} \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

converge vers une limite qu'on note par $-\log \|\cdot\|_{Q,(X,\omega),(L,\|\cdot\|)}$. Si l'on considère la forme différentielle généralisée suivante $\tilde{\text{ch}}(L, \|\cdot\|, \|\cdot\|') Td(\overline{TX})$, voir définition [11, § 4.3], alors on dispose d'une formule d'anomalies généralisée en posant :

$$\log h_{Q,(X,\omega),(L,\|\cdot\|)} - \log h_{Q,(X,\omega),(L,\|\cdot\|')} = - \left[\int_X \tilde{\text{ch}}(L, \|\cdot\|, \|\cdot\|') Td(\overline{TX}) \right]^{(\dim_{\mathbb{C}} X)}.$$

On suppose maintenant que

$$H^q(X, L) = 0 \quad \forall q \geq 1. \quad (10)$$

donc,

$$\lambda(L) = \det(H^0(X, L)).$$

On va montrer que

$$(h_{L^2,(X,\omega),(L,\|\cdot\|_n)})_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h_{L^2,(X,\omega),(L,\|\cdot\|)},$$

ce qui nous permettra de déduire que la suite suivante converge :

$$\left(T((X, \omega), \overline{L}') + \int_X \tilde{\text{ch}}(E_1 \otimes E_2^{-1}, \|\cdot\|_n, \|\cdot\|') Td(\overline{TX}) - \log \left(\frac{h_{L^2,(X,\omega),(L,\|\cdot\|')}}{h_{L^2,(X,\omega),(L,\|\cdot\|_n)}} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

On définit alors la *torsion analytique holomorphe généralisée* d'un fibré en droites intégrable \overline{L} , vérifiant l'hypothèse (10), sur X munie d'une métrique kählérienne ω , en posant :

$$\begin{aligned} T((X, \omega), \overline{L}) &:= T((X, \omega), \overline{L}') + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \tilde{\text{ch}}(E_1 \otimes E_2^{-1}, \|\cdot\|_n, \|\cdot\|') Td(\overline{TX}) \\ &\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{h_{L^2,(X,\omega),(L,\|\cdot\|')}}{h_{L^2,(X,\omega),(L,\|\cdot\|_n)}} \right), \end{aligned}$$

et on peut vérifier que

$$T((X, \omega), \overline{L}) = T((X, \omega), \overline{L}') + \int_X \tilde{\text{ch}}(L, \|\cdot\|, \|\cdot\|') Td(\overline{TX}) - \log \left(\frac{h_{L^2,(X,\omega),(L,\|\cdot\|')}}{h_{L^2,(X,\omega),(L,\|\cdot\|)}} \right).$$

Soit $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de métriques continues qui converge uniformément vers $\|\cdot\|$ sur L . Rappelons que si s et t deux sections globales de L alors

$$(s, t)_{L^2, n} = \int_X h_n(s, t) \omega,$$

Par polarisation, on se ramène à $s = t$. Comme la suite $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\|\cdot\|$, on peut trouver pour tout ε , un entier $N \in \mathbb{N}$ qui ne dépend pas de s tel que

$$(1 - \varepsilon)(s, s)_{L^2, \infty} \leq (s, s)_{L^2, n} \leq (1 + \varepsilon)(s, s)_{L^2, n} \quad \forall n \geq N,$$

où on a noté par $(\cdot, \cdot)_{L^2, \infty}$ la norme L^2 associée à $\|\cdot\|$ et à ω .

On déduit que la suite de matrices suivante :

$$\left(\left((s_j, s_k)_{L^2, n} \right)_{1 \leq k, l \leq r} \right)_{n \in \mathbb{N}},^4$$

converge vers $\left((s_j, s_k)_{L^2, \infty} \right)_{1 \leq k, l \leq \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, L)}$ pour une norme matricielle arbitraire et $\{s_1, s_2, \dots, s_r\}$ est une base de $H^0(X, L)$. Donc,

$$\left(\det(s_j, s_k)_{L^2, n} \right)_{1 \leq k, l \leq r} \xrightarrow{n \mapsto \infty} \det \left((s_j, s_k)_{L^2, \infty} \right)_{1 \leq k, l \leq r}.$$

En particulier,

$$\left(h_{L^2, (X, \omega), (L, \|\cdot\|_n)} \right)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \mapsto \infty} h_{L^2, (X, \omega), (L, \|\cdot\|)}.$$

□

Lorsque X est une surface de Riemann compacte, alors on obtient un résultat plus général. En effet, on peut considérer des métriques intégrables sur X et sur L et on étend comme avant la notion de métrique Quillen à cette situation :

Théorème 4.4. *Soit X une surface de Riemann compacte, et L un fibré en droites sur X . Soit $h_{\infty, X}$ (resp. vers $h_{\infty, L}$) une métrique intégrable sur X (resp. L). On note par $\omega_{\infty, X}$ la forme kählérienne associée à $h_{\infty, X}$.*

- On considère une décomposition de $(TX, h_{\infty, X}) = \overline{G_1}_{\infty} \otimes \overline{G_2}_{\infty}^{-1}$ en fibrés en droites admissibles, et soit $(h_{n, G_1})_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(h_{n, G_2})_{n \in \mathbb{N}}$) une suite de métriques positives et C^∞ qui converge uniformément vers h_{∞, G_1} (resp. h_{∞, G_2}). On pose $h_{n, X} := h_{n, G_1} \otimes h_{n, G_2}^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on note par $\omega_{n, X}$ la forme kählérienne associée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Soit $\overline{L} = (E_1, \|\cdot\|_1) \otimes (E_2, \|\cdot\|_2)^{-1}$ une décomposition en fibrés admissibles. On considère $(\|\cdot\|_{E_i, n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de métriques positives C^∞ sur E_i qui converge uniformément vers $\|\cdot\|_i$, pour $i = 1, 2$, et on pose $h_{n, L} := h_{n, E_1} \otimes h_{n, E_2}^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors la suite double suivante :

$$\left(T((X, \omega_{n, X}); (L, h_{m, L})) \right)_{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}},$$

converge vers une limite finie qui ne dépend pas du choix des suites ci-dessus. On la note par $T((X, \omega_{\infty, X}); (L, h_{\infty, L}))$.

Démonstration. On procède comme avant, en utilisant la formule (4). □

4.1 Un contre exemple

On va montrer à l'aide d'un contre exemple la non validité du théorème (4.3), si l'on supprime la condition de la positivité, en particulier, la métrique de Quillen généralisée considérée comme fonction en la métrique n'est pas continue sur l'espace des métriques intégrables muni de la topologie de la convergence uniforme.

Pour simplifier, on suppose que $X = \mathbb{P}^1$ et que L est le fibré trivial. On peut adapter notre exemple au cas d'une variété kählérienne compacte quelconque. Soient $c > 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $0 < \delta \ll \varepsilon$ et $0 < \gamma \ll \varepsilon - \delta$.

4. $r := \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, L)$.

On pose f la fonction définie sur $[1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon + \delta] \cup [1 - \gamma, 1 + \gamma] \cup [1 + \varepsilon - \delta, 1 + \varepsilon]$ par :

$$f(r) = \begin{cases} \frac{c\sqrt{\delta}}{\delta}r - \frac{c\sqrt{\delta}}{\delta}(1 - \varepsilon) & \text{si } r \in [1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon + \delta] \\ c\sqrt{\delta} & \text{si } r \in [1 - \gamma, 1 + \gamma] \\ -\frac{c\sqrt{\delta}}{\delta}r + \frac{c\sqrt{\delta}}{\delta}(1 + \varepsilon) & \text{si } r \in [1 + \varepsilon - \delta, 1 + \varepsilon], \end{cases}$$

et on recolle f par des fonctions \mathcal{C}^∞ de façon à obtenir une fonction qui soit \mathcal{C}^∞ qui coïncide avec f sur $]1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon + \delta[\cup]1 - \gamma, 1 + \gamma[\cup]1 + \varepsilon - \delta, 1 + \varepsilon[$, à support compact, nulle en 0 et qu'elle soit de norme sup inférieure à $2c\sqrt{\delta}$. On la note par $f_{c,\delta}$. (On peut supposer que que suite de fonction en δ est décroissante). On étend $f_{c,\delta}$ en une fonction \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{P}^1 qu'on notera aussi par $f_{c,\delta}$ et on pose alors $(\mathcal{O}, h_{c,\delta})$ le fibré trivial hermitien muni de la métrique $h_{c,\delta}$ donnée par $h_{c,\delta}(1, 1) = e^{-f_{c,\delta}}$. Puisque $\sup_{\mathbb{P}^1} |f_{c,\delta}| \leq 2c\sqrt{\delta}$, alors $(h_{c,\delta})_\delta$ est une suite croissante qui converge uniformément, lorsque $\delta \mapsto 0$, vers h_∞ (la métrique canonique de \mathcal{O} , c'est à dire $h_\infty(1, 1) = 1$).

Soit ω une forme kählérienne \mathcal{C}^∞ quelconque sur \mathbb{P}^1 . On considère la métrique de Quillen associée à $h_{c,\delta}$ et à ω . Par (3), on a :

$$\begin{aligned} -T((\mathbb{P}^1, \omega); (\mathcal{O}, h_{c,\delta})) + T((\mathbb{P}^1, \omega); (\mathcal{O}, h_\infty)) &= \int_{\mathbb{P}^1} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{O}, h_{c,\delta}, h_\infty) Td(\overline{T\mathbb{P}^1}) + \log \frac{h_{L^2, (\mathbb{P}^1, \omega), (\mathcal{O}, h_{c,\delta})}}{h_{L^2, (\mathbb{P}^1, \omega), (\mathcal{O}, h_\infty)}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{P}^1} f_{c,\delta} c_1(\overline{T\mathbb{P}^1}) + \int_{\mathbb{P}^1} f_{c,\delta} dd^c f_{c,\delta} + \log \frac{h_{L^2, (\mathbb{P}^1, \omega), (\mathcal{O}, h_{c,\delta})}}{h_{L^2, (\mathbb{P}^1, \omega), (\mathcal{O}, h_\infty)}} \\ &= \int_{\mathbb{P}^1} f_{c,\delta} dd^c f_{c,\delta} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{P}^1} f_{c,\delta} c_1(\overline{T\mathbb{P}^1}) + \log \frac{h_{L^2, (\mathbb{P}^1, \omega), (\mathcal{O}, h_{c,\delta})}}{h_{L^2, (\mathbb{P}^1, \omega), (\mathcal{O}, h_\infty)}}. \end{aligned}$$

Par construction de $f_{c,\delta}$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{P}^1} f_{c,\delta} dd^c f_{c,\delta} &= \int_{\mathbb{R}^+} f_{c,\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f_{c,\delta}}{\partial r} \right) r dr \\ &= \left[r f_{c,\delta} \frac{\partial f_{c,\delta}}{\partial r} \right]_0^\infty - \int_{\mathbb{R}^+} r \left(\frac{\partial f_{c,\delta}}{\partial r} \right)^2 dr \\ &= - \int_A r \left(\frac{\partial f_{c,\delta}}{\partial r} \right)^2 dr - \int_{\mathbb{R}^+ \setminus A} r \left(\frac{\partial f_{c,\delta}}{\partial r} \right)^2 dr \quad \text{où } A = [1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon + \delta] \cup [1 + \varepsilon - \delta, 1 + \varepsilon] \\ &= -\frac{2}{\delta} f_{c,\delta}(1)^2 - \int_{\mathbb{R}^+ \setminus A} r \left(\frac{\partial f_{c,\delta}}{\partial r} \right)^2 dr \\ &= -2c^2 - \int_{\mathbb{R}^+ \setminus A} r \left(\frac{\partial f_{c,\delta}}{\partial r} \right)^2 dr. \end{aligned}$$

Donc,

$$-T((\mathbb{P}^1, \omega); (\mathcal{O}, h_{c,\delta})) + T((\mathbb{P}^1, \omega); (\mathcal{O}, h_\infty)) \leq -2c^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{P}^1} f_{c,\delta} c_1(\overline{T\mathbb{P}^1}) + \log \frac{h_{L^2, (\mathbb{P}^1, \omega), (\mathcal{O}, h_{c,\delta})}}{h_{L^2, (\mathbb{P}^1, \omega), (\mathcal{O}, h_\infty)}}.$$

Comme $\sup_{\mathbb{P}^1} |f_{c,\delta}| \leq 2c\sqrt{\delta}$, et que \mathbb{P}^1 est projectif, alors il existe une constante $M > 0$ telle que $|\int_{\mathbb{P}^1} f_{c,\delta} c_1(\overline{T\mathbb{P}^1})| \leq M\sqrt{\delta} c^5$, $\forall c > 0$ et $\forall 0 < \delta \ll 1$. Par construction, $h_{c,\delta} \leq h_\infty$, alors on obtient :

$$-T((\mathbb{P}^1, \omega); (\mathcal{O}, h_{c,\delta})) + T((\mathbb{P}^1, \omega); (\mathcal{O}, h_\infty)) \leq -2c^2 + M\sqrt{\delta} c, \quad \forall c > 0 \quad \forall 0 < \delta \ll 1. \quad (11)$$

5. Il suffit de noter qu'il existe $l \gg 1$ indépendant de c et de δ , tel que $c_1(\overline{T\mathbb{P}^1}) + l\omega_{FS}$ soit positif.

Théorème 4.5. *Pour toute forme de kählerienne ω , sur \mathbb{P}^1 , et pour tout $c > 0$, il existe une suite de métriques $(h_{c,\delta})_\delta$ de classe \mathcal{C}^∞ convergeant uniformément vers la métrique canonique de \mathcal{O} sur \mathbb{P}^1 telle que :*

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} T((\mathbb{P}^1, \omega); (\mathcal{O}, h_{c,\delta})) - T((\mathbb{P}^1, \omega_{\mathbb{P}^1}), (\mathcal{O}, h_\infty)) \leq -2c^2.$$

Démonstration. Par (11), on a

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} T((\mathbb{P}^1, \omega); (\mathcal{O}, h_{c,\delta})) - T((\mathbb{P}^1, \omega); (\mathcal{O}, h_\infty)) \leq -2c^2 \quad \forall c > 0.$$

On en déduit que la suite $\left(T((\mathbb{P}^1, \omega); (\mathcal{O}, h_{c,\delta}))\right)_{\delta > 0}$ ne converge pas vers $T((\mathbb{P}^1, \omega); (\mathcal{O}, h_\infty))$ lorsque δ tends vers 0. \square

Remarque 4.6.

1. On a $h_{c,\delta}$ est invariante par l'action du tore compact de \mathbb{P}^1 .
2. Malgré que la suite $\left(T((\mathbb{P}^1, \omega); (\mathcal{O}, h_{c,\delta}))\right)_{\delta > 0}$ ne converge pas vers $T(\mathcal{O}, h_\infty)$, on notera qu'il existe une constante M' telle que $-T((\mathbb{P}^1, \omega); (\mathcal{O}, h_{c,\delta})) \leq M'$, $\forall 0 < \delta \ll 1$ et $\forall c > 0$. En effet, de (11) on déduit que :

$$-T((\mathbb{P}^1, \omega); (\mathcal{O}, h_{c,\delta})) \leq \frac{M^2}{8} - T((\mathbb{P}^1, \omega); (\mathcal{O}, h_\infty)) =: M' \quad \forall 0 < \delta \ll 1, \forall c > 0.$$

On établit ce fait en toute généralité, voir [8, théorème 1.3]. Plus précisément, on montre que La torsion analytique holomorphe vue comme fonction en la métrique est minorée sur l'espace des métriques intégrables et invariantes par l'action du tore compact sur un fibré en droites équivariant sur \mathbb{P}^1 .

4.2 Un calcul explicite de la torsion analytique généralisée dans le cas $X = \mathbb{P}^1$

D'après le théorème (4.4), ou voir [7, théorème 2.5], on peut considérer le torsion analytique généralisée associée à $\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty$ le fibré $\mathcal{O}(m)$ muni de sa métrique canonique, et \mathbb{P}^1 muni de $\omega_\infty = \frac{i}{2\pi} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{\max(1, |z|^4)}$.

En utilisant les formules d'anomalies et connaissant la valeur explicite de $T((\mathbb{P}^1, \omega_{FS}); \overline{\mathcal{O}(m)}_{FS})$, on calcule la torsion analytique généralisée $T((\mathbb{P}^1, \omega_\infty); \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty)$, où

Proposition 4.7. *On a pour tout entier $m \geq 1$:*

$$T((\mathbb{P}^1, \omega_\infty); \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty) = 4\zeta'_\mathbb{Q}(-1) - \frac{1}{6} + \log\left(\frac{(m+2)^{m+1}}{((m+1)!)^2}\right).$$

Démonstration. Voir la preuve de [7, proposition 2.7]. \square

Remarque 4.8. Lorsque ω est une forme kählerienne invariante par l'action de \mathbb{S}^1 et que la métrique de $\mathcal{O}(m)$ est admissible et invariante aussi par l'action du tore compact de \mathbb{P}^1 , alors on peut donner une expression pour $T((\mathbb{P}^1, \omega); \overline{\mathcal{O}(m)})$ en termes la transformée de Legendre-Fenchel. En fait, on peut exprimer les formules d'anomalies, dans ce cas, comme intégrales des transformées de Legendre-Fenchel associées aux métriques de \mathbb{P}^1 et de $\mathcal{O}(m)$, voir [3] pour la définition de la transformée de Legendre-Fenchel associée à une métrique admissible invariante par l'action du tore compact.

5 Généralisation de la torsion analytique sur les variétés toriques lisses dans le formalisme de Burgos, Litcanu et Freixas

5.1 Extension de la notion de métrique canonique aux faisceaux cohérents métrisés sur une variété torique lisse

Soit X une variété complexe. On étend la classe de fibrés vectoriels hermitiens de classe \mathcal{C}^∞ en considérant les fibrés hermitiens \overline{E} qui s'écrivent sous la forme :

$$\overline{E} = \overline{E'} \oplus \bigoplus_{i=1}^d \overline{L}_i,$$

où $\overline{E'}$ est un fibré hermitien de classe \mathcal{C}^∞ et $\overline{L}_1, \dots, \overline{L}_d$ sont des fibrés en droites intégrables, on appellera \overline{E} un fibré hermitien intégrable.

Dans cette partie on utilise la théorie du [11, § 4.3] pour étendre la notion de classes de Bott-Chern aux suite exactes de fibrés hermitiens intégrables. Plus précisément, si ch est le caractère de Chern et

$$\overline{\eta} : 0 \longrightarrow \overline{S} \longrightarrow \overline{E} \longrightarrow \overline{Q} \longrightarrow 0,$$

est une suite exacte de fibrés hermitiens intégrables, alors on leur associe une unique forme différentielle généralisée $\widetilde{ch}(\overline{\eta})$ élément de $\widetilde{A}_g^*(X)$, (voir [11, p. 66]), qui vérifie les mêmes propriétés classiques de la classe de Bott-Chern, voir [5].

Supposons que $\widetilde{ch}(\overline{\eta})$ existe. On écrit $\overline{S} = \overline{S'} \oplus \overline{S''}$, $\overline{E} = \overline{E'} \oplus \overline{E''}$ et $\overline{Q} = \overline{Q'} \oplus \overline{Q''}$ où \overline{S} , $\overline{E'}$ et $\overline{Q'}$ sont des fibrés hermitiens de classe \mathcal{C}^∞ et que chacun des fibrés hermitiens $\overline{S''}$, $\overline{E''}$ et $\overline{Q''}$ est une somme orthogonale de fibrés en droites intégrables.

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{\eta} : 0 & \longrightarrow & \overline{S} & \longrightarrow & \overline{E} & \longrightarrow & \overline{Q} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow id & & \uparrow id & & \uparrow id \\ \overline{\eta}_0 : 0 & \longrightarrow & \overline{S}_0 & \longrightarrow & \overline{E}_0 & \longrightarrow & \overline{Q}_0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

avec $\overline{S}_0 = \overline{S'} \oplus \overline{S''_0}$, $\overline{E}_0 = \overline{E'} \oplus \overline{E''_0}$ et $\overline{Q}_0 = \overline{Q'} \oplus \overline{Q''_0}$ tels que $\overline{S''_0}$, $\overline{E''_0}$ et $\overline{Q''_0}$ sont munis de métriques hermitiennes de classes \mathcal{C}^∞ . On a

$$\widetilde{ch}(\overline{\eta}_0) - \widetilde{ch}(\overline{\eta}) = \widetilde{ch}(\overline{C}_1 \oplus \overline{C}_3) - \widetilde{ch}(\overline{C}_2),$$

où \overline{C}_1 , \overline{C}_2 et \overline{C}_3 désignent respectivement la première, la deuxième et la troisième colonne du diagramme ci-dessus. On vérifie que

$$\widetilde{ch}(\overline{C}_1 \oplus \overline{C}_3) = \widetilde{ch}(\overline{C}_1) + \widetilde{ch}(\overline{C}_3) = \widetilde{ch}(\overline{S''_0} \rightarrow \overline{S''}) + \widetilde{ch}(\overline{Q''_0} \rightarrow \overline{Q''}),$$

et

$$\widetilde{ch}(\overline{C}_2) = \widetilde{ch}(\overline{E''_0} \rightarrow \overline{E''}).$$

Le calcul de ces dernières classes se ramène au cas des fibrés vectoriels de rang 1. On déduit l'unicité et l'existence de la classe $\widetilde{ch}(\overline{\eta})$. Pour les propriétés de fonctorialité, elles découlent de la théorie des formes différentielles généralisées de [11, § 4.3].

Comme application, on peut étendre la notion de faisceaux cohérents métrisés de [9] pour qu'elle prend en compte les fibrés hermitiens intégrables. On dira que $\overline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}, \overline{E}_\bullet \rightarrow \mathcal{F})$ est un faisceau cohérent intégrable si chaque terme du complexe \overline{E}_\bullet est un fibré hermitien intégrable, et on étend la définition

de [9] pour la classe de Bott-Chern à notre situation.

Dans la suite, on s'intéresse aux variétés toriques. Le cas des variétés toriques lisses est plus intéressant, puisqu'on montre dans [10], que tout fibré vectoriel équivariant admet une résolution canonique par des fibrés vectoriels scindés. Rappelons d'abord la construction de la métrique canonique sur un fibré en droites équivariant. Soit \mathcal{X} une variété torique projective lisse sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, on note par T le tore associé. Soit L un fibré en droites sur \mathcal{X} , on rappelle qu'on construit de manière unique une métrique sur $L(\mathbb{C})$:

Proposition 5.1. *Soit L un fibré en droites sur \mathcal{X} . Il existe un diviseur horizontal T -invariant D sur \mathcal{X} et un isomorphisme :*

$$\Phi : L \longrightarrow \mathcal{O}(D).$$

La métrique $\Phi^ \|\cdot\|_{D,\infty}$ sur L est indépendante des choix de D et Φ . On l'appelle métrique canonique sur L et on la note $\|\cdot\|_{L,\infty}$. On note $\overline{L}_\infty = (L, \|\cdot\|_{L,\infty})$ le fibré L muni de sa métrique canonique.*

Démonstration. Voir [11, proposition 3.4.1]. □

Définition 5.2. *Soit X une variété torique lisse. Soit $\overline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}, \overline{E}_\bullet \rightarrow \mathcal{F})$ un faisceau cohérent métrisé sur X , on dira que la métrique de \mathcal{F} est intégrable (resp. canonique) si chaque terme de \overline{E}_\bullet est une somme directe orthogonale de fibrés en droites munis de métriques intégrables (resp. de leur métriques canoniques). On appelle $\overline{\mathcal{F}}$ fibré intégrable. On note $\overline{\mathcal{F}}^c$ au lieu de $\overline{\mathcal{F}}$ lorsqu'on considère des métriques canoniques partout.*

Proposition 5.3. *Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme équivariant de variétés toriques projectives lisses, si $\overline{\mathcal{F}}^c$ est un faisceau cohérent métrisé dont la métrique est canonique, alors $f^* \overline{\mathcal{F}}^c$ l'est aussi*

Démonstration. Cela résulte du cas classique pour les fibrés en droites. □

Proposition 5.4. *Tout fibré vectoriel équivariant sur une variété torique lisse admet une métrique canonique.*

Démonstration. On sait que tout fibré vectoriel équivariant, et plus généralement un faisceau équivariant, sur X , voir [10] pour le cas de fibré vectoriel équivariant, admet une résolution finie canonique en fibrés vectoriels scindés. Ce qui montre que comme pour le cas des fibrés en droites, on peut associer à tout faisceau équivariant une métrique canonique généralisée. □

On se propose maintenant de comparer la notion de métriques canonique pour un fibré en droites et la définition (5.2).

Proposition 5.5. *on va montrer que si L est un fibré en droites sur X alors*

$$\tilde{\text{ch}}(\overline{L}^c \longrightarrow \overline{L}_\infty) = 0$$

Plus généralement, si $\mathcal{F} = \bigoplus_{k=1}^e L_k$ est un fibré vectoriel scindé. On munit \mathcal{F} d'une métrique canonique c'est à dire $\mathcal{F}^c = (\mathcal{F}, \overline{E}_\bullet \rightarrow \mathcal{F})$ comme dans la définition ci-dessus. alors

$$\tilde{c}_1(\overline{\mathcal{F}}^c \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^e \overline{L}_k) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\text{ch}}_{\max}(\overline{\mathcal{F}}^c \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^e \overline{L}_{k,\infty}) = 0.$$

dans $\tilde{A}(X)$ ⁶.

6. $\tilde{A}(X)$ est par définition l'espace des $(*,*)$ -formes différentielles \mathcal{C}^∞ sur X modulo $\text{Im} \partial + \text{Im} \overline{\partial}$.

Démonstration. On suppose que $E_\bullet = E_l \rightarrow E_{l-1} \rightarrow \cdots \rightarrow E_1$ tel que :

$$\eta : 0 \longrightarrow E_l \longrightarrow E_{l-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

soit une suite exacte de fibrés vectoriels sur X . On suppose que pour tout $i = 1, \dots, l$, $E_i = \bigoplus_{k=1}^{e_i} L_{i,k}$ où $L_{i,1}, L_{i,2}, \dots, L_{i,e_i}$ sont des fibrés en droites sur X . On munit alors E_i de la métrique suivante h_{E_i} :

$$h_{E_i} = h_{L_{i,1},\infty} \oplus \cdots \oplus h_{L_{i,e_i},\infty},$$

où $h_{L_{i,k},\infty}$ est la métrique canonique de $L_{i,k}$ pour $k = 1, \dots, e_i$ et pour tout $i = 0, \dots, l$. On note par $\overline{\eta}$ la suite η munie de ces métriques.

Si l'on pose $L = \det(E_l) \otimes \det(E_{l-2}) \otimes \det(E_{l-\lfloor \frac{l}{2} \rfloor})$ et $L' = \det(E_{l-1}) \otimes \det(E_{l-3}) \cdots \det(E_{l-\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor})$ alors on dispose d'un isomorphisme canonique induit par η :

$$\alpha : L \longrightarrow L'.$$

Par construction, L (resp. L') est muni de la métrique $h_L := \det(h_{E_l}) \otimes \det(h_{E_{l-2}}) \otimes \cdots \det(h_{E_{l-\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}})$ (resp. de $h_{L'} := \det(h_{E_{l-1}}) \otimes \det(h_{E_{l-3}}) \cdots \det(h_{E_{l-\lfloor \frac{l+1}{2} \rfloor}})$). D'après (5.1) et [11, proposition 3.3.6] ces deux métriques sont les métriques canoniques de L et L' .

On a

$$h_L = h_{L'} \exp(\tilde{c}_1(\overline{\eta})).$$

Par unicité de la métrique canonique, voir (5.1), on conclut que

$$\tilde{c}_1(\overline{\eta}) = 0.$$

Soit \mathcal{X} un modèle de X sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. On considère, voir [11, p. 53] :

$$\begin{aligned} a : \widetilde{A}^{*-1,*-1} &\longrightarrow \widehat{\text{CH}}_{int}^*(X) \\ \beta &\longmapsto [(0, \beta)], \end{aligned}$$

D'après [11], on a :

$$a\left(\widetilde{\text{ch}}(\overline{\mathcal{F}}^c \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^e \overline{L}_{k,\infty})\right) = \widehat{\text{ch}}(\overline{\mathcal{F}}^c) - \widehat{\text{ch}}(\bigoplus_{k=1}^e \overline{L}_{k,\infty}),$$

où $\widehat{\text{ch}}$ est la classe de Chern arithmétique associée au caractère ch , et $\widehat{\text{ch}}(\overline{\mathcal{F}}^c)$ est par définition égale à $\sum_{j=1}^l (-1)^j \widehat{\text{ch}}(\overline{E}_j)$. Par [11, lemme 7.4.2], les puissances maximales des premières classe arithmétiques de Chern associées aux fibrés en droites munis de métriques canoniques sont nulles.

Par suite,

$$\widetilde{\text{ch}}_{\max}(\overline{\mathcal{F}}^c \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^e \overline{L}_{k,\infty}) = 0.$$

□

5.2 Torsion analytique généralisée associée aux fibrés intégrables sur variété torique

Soit X une variété torique non-singulière munie de ω , une forme kählérienne et $\overline{\mathcal{L}}$ un fibré hermitien sur X . On notera par $h_{Q,\overline{TX},\overline{\mathcal{L}}}$ la métrique de Quillen au lieu de $h_{Q,\omega,\overline{\mathcal{L}}}$, où \overline{TX} est le fibré tangent muni de la métrique associée à ω .

On munit \overline{L}_∞ de sa métrique canonique. On pose $\overline{TX}^c = (TX, 0 \longrightarrow \overline{\mathcal{O}}_\infty^r \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{N+r} \overline{\mathcal{O}}(D_i)_\infty \longrightarrow TX)$ considéré comme un fibré canonique où

$$\varepsilon_X : 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^r \longrightarrow \oplus_{i=1}^{N+r} \mathcal{O}(D_i) \longrightarrow TX \longrightarrow 0,$$

est la suite d'Euler sur X , r est le rang de $\text{Pic}(X)$.

Dans ce cas, on définit $h_{Q, \overline{TX}^c, \overline{L}_\infty}$, la norme de Quillen associé au fibré \overline{L}_∞ et à \overline{TX}^c en posant :

$$\log h_{Q, \overline{TX}^c, \overline{L}_\infty} := - \int_X \text{ch}(\overline{L}_\infty) \widetilde{Td}(0 \longrightarrow \overline{TX}^c \longrightarrow \overline{TX} \longrightarrow 0) + \log h_{Q, \overline{TX}, \overline{L}}.$$

On montre, voir [9, théorème 2.19], que :

$$\widetilde{Td}(0 \longrightarrow \overline{TX}^c \longrightarrow \overline{TX} \longrightarrow 0) = \widetilde{Td}(\overline{\varepsilon}_X),$$

où

$$\overline{\varepsilon}_X : 0 \longrightarrow \overline{\mathcal{O}}_\infty^{\oplus r} \longrightarrow \oplus_{i=1}^{N+r} \overline{\mathcal{O}(D_i)}_\infty \longrightarrow \overline{TX} \longrightarrow 0.$$

Donc

$$\log h_{Q, \overline{TX}^c, \overline{L}_\infty} = - \int_X \text{ch}(\overline{L}_\infty) \widetilde{Td}(\overline{\varepsilon}_X) + \log h_{Q, \overline{TX}, \overline{L}}.$$

On a,

$$a(\widetilde{Td}(\overline{\varepsilon}_X)) = \prod_{i=1}^{N+r} \widehat{Td}(\overline{\mathcal{O}(D_i)}_\infty) - \widehat{Td}(\overline{TX}).$$

Par le théorème de Riemann-Roch arithmétique, voir [6] on a :

$$\log h_{Q, \overline{TX}, \overline{L}_\infty} = \int_X \widehat{\text{ch}}(\overline{L}_\infty) Td^A(\overline{TX}).$$

On obtient alors, en utilisant l'annulation des puissance maximales des classes arithmétiques associées aux métriques canoniques :

$$\begin{aligned} -\log h_{Q, \overline{TX}^c, \overline{L}_\infty} &= \int_X \widehat{\text{ch}}(\overline{L}_\infty) \left(\prod_{i=1}^{N+r} \widehat{Td}(\overline{\mathcal{O}(D_i)}_\infty) - \widehat{Td}(\overline{TX}) \right) + \int_X \widehat{\text{ch}}(\overline{L}_\infty) Td^A(\overline{TX}) \\ &= - \int_X \widehat{\text{ch}}(\overline{L}_\infty) \widehat{Td}(\overline{TX}) + \int_X \widehat{\text{ch}}(\overline{L}_\infty) \widehat{Td}(\overline{TX}) - \int_X \text{ch}(L) Td(TX) R(TX). \end{aligned}$$

Donc,

$$\log h_{Q, \overline{TX}^c, \overline{L}_\infty} = \int_X \text{ch}(L) Td(TX) R(TX).$$

Théorème 5.6. *Avec les notations précédentes, on a*

$$h_{Q, \overline{T\mathbb{P}^1}^c, \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty} = h_{Q, (\mathbb{P}^1, \omega_\infty); \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. Cela résulte de :

$$\widetilde{Td}(0 \longrightarrow \overline{T\mathbb{P}^1}^c \longrightarrow \overline{T\mathbb{P}^1}_\infty \longrightarrow 0) = 0,$$

dans $\widetilde{A}(\mathbb{P}^1)$. □

Références

- [1] Nicole Berline, Ezra Getzler, and Michèle Vergne. *Heat kernels and Dirac operators*. Grundlehren Text Editions. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Corrected reprint of the 1992 original.
- [2] J.-M. Bismut, H. Gillet, and C. Soulé. Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. I. Bott-Chern forms and analytic torsion. *Comm. Math. Phys.*, 115(1) :49–78, 1988.
- [3] José Ignacio Burgos Gil, Patrice Philippon, and Martín Sombra. Arithmetic geometry of toric varieties. Metrics, measures and heights. *arXiv.org*, arXiv :1105.5584v1 [math.AG], Mai 2011.
- [4] Jean-Pierre Demailly. Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory. In *Complex analysis and geometry*, Univ. Ser. Math., pages 115–193. Plenum, New York, 1993.
- [5] Henri Gillet and Christophe Soulé. Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric. I. *Ann. of Math. (2)*, 131(1) :163–203, 1990.
- [6] Henri Gillet and Christophe Soulé. An arithmetic Riemann-Roch theorem. *Invent. Math.*, 110(3) :473–543, 1992.
- [7] Mounir Hajli. Sur la fonction zêta associée au laplacien singulier associé aux métriques canoniques sur la droite projective complexe. *Arxiv*.
- [8] Mounir Hajli. Sur une inégalité fonctionnelle sur les variétés toriques avec application à la torsion analytique holomorphe. *Arxiv*.
- [9] R. Litcanu J. I. Burgos Gil. Singular Bott-Chern classes and the arithmetic Grothendieck-Riemann-Roch theorem for closed immersions. *Documenta Math.*, 15 :73–176, 2010.
- [10] A.A. Klyachko. Equivariant bundles on toric varieties. (Equivariant bundles on toral varieties.). *Math. USSR, Izv.*, 35(2) :337–375, 1990.
- [11] Vincent Maillot. Géométrie d’Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, 80 :vi+129, 2000.
- [12] D. B. Ray and I. M. Singer. Analytic torsion for complex manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 98 :154–177, 1973.
- [13] Damian Roessler. An Adams-Riemann-Roch theorem in Arakelov geometry. *Duke Math. J.*, 96(1) :61–126, 1999.
- [14] Shouwu Zhang. Small points and adelic metrics. *J. Algebraic Geom.*, 4(2) :281–300, 1995.

National Center for Theoretical Sciences, (Taipei Office)
National Taiwan University, Taipei 106, Taiwan
e-mail : hajli@math.jussieu.fr